

① اگر یک زیرمجموعه چهار عضوی از مجموعه $\{A, B, C, D, E, F\}$ انتخاب کنیم، احتمال این که عضو A در آن باشد و عضوهای C و D همزمان در آن نباشند، کدام است؟

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{2}{15} \\ (4) \quad & \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{7}{15} \\ (3) \quad & \frac{1}{5} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ما به $\binom{6}{4} = 15$ طریق می‌توانیم یک زیرمجموعه ۴ عضوی از مجموعه ۶ عضوی مورد نظر انتخاب کنیم. برای این که عضو A در زیرمجموعه انتخابی بوده و عضوهای C و D همزمان در آن نباشند، باید سه عضو از مجموعه $\{B, C, D, E, F\}$ را طوری انتخاب کنیم که یا C در آن باشد یا D و یا هیچ کدام در آن نباشند. پس تعداد حالات برابر می‌شود با:

$$\binom{5}{3} - \binom{3}{1} = 10 - 3 = 7$$

انتخاب همزمان تعداد کل حالات انتخاب برای مجموعه ۳ عضو از ۵ عضو

پس با احتمال $\frac{7}{15}$ می‌توان زیرمجموعه مذکور را انتخاب کرد.

② با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و بدون تکرار ارقام، چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۲۰۰۰ و کوچکتر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟

$$(4) \quad 140$$

$$(3) \quad 120$$

$$(2) \quad 86$$

$$(1) \quad 100$$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای آنکه عدد از ۲۰۰۰ بزرگتر و از ۴۰۰۰ کوچکتر باشد، باید رقم هزارگان آن ۲ یا ۳ باشد. چون تکرار ارقام مجاز نیست، برای رقم صدگان ۵ حالت، رقم دهگان ۴ حالت و رقم یکان ۳ حالت داریم. طبق اصل ضرب، تعداد عددهای مورد نظر برابر است با:

۲ یا ۳

$$\uparrow 2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$$

۳) گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته‌گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱۶۸ (۴)

۱۵۴ (۳)

۱۴۰ (۲)

۱۲۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با انتخاب ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه گل از بین ۸ شاخه گل مختلف، طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$\binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} + \frac{8 \times 7}{2 \times 1}$$

$$= \binom{8}{3} + \binom{8}{2}$$

$$= 70 + 56 + 28 = 154$$

توجه: از تساوی $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ برای ساده‌تر کردن محاسبات استفاده کردیم.

۴) اگر در یک جامعه سرشماری کنیم، اندازه نمونه برابر با ۱۸ خواهد بود. در حالتی که سرشماری نکنیم، به چند حالت می‌توان نمونه‌هایی با اندازه ۱۶ از این جامعه انتخاب کرد؟

۱۵۳ (۴)

۲۱۶ - ۱ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

در حالتی که سرشماری می‌کنیم، اندازه نمونه با اندازه جامعه برابر است، پس اندازه جامعه در این بررسی برابر با ۱۸ است. تعداد حالت‌هایی که می‌توان نمونه‌ای با اندازه ۱۶ از جامعه‌ای با اندازه ۱۸ انتخاب کرد برابر با تعداد حالت‌های انتخاب ۱۶ شیء از ۱۸ شیء است، پس:

$$\binom{18}{16} = \frac{18!}{16! \times 2!} = \frac{18 \times 17}{2} = 153$$

۵) شش نفر به چند طریق می‌توانند در یک صف قرار گیرند به‌طوری که شخص a جلوتر از اشخاص b و c در صف قرار گیرد؟

۲۴۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

۴۸۰ (۲)

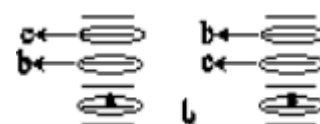
۷۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

روش اول: ابتدا از شش جایگاه، ۳ جایگاه را برای ۳ شخص a و b و c انتخاب می‌کنیم  یعنی $\binom{6}{3}$.

اکنون این سه جایگاه را می‌توانیم به دو طریق توسط a و b و c پر کنیم به‌طوری که a جلوتر از b و c باشد.



و در پایان، ۳ شخص باقی‌مانده به ۳! حالت در ۳ جایگاه باقی‌مانده قرار می‌گیرند.

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌ها} = \binom{6}{3} \times 2 \times 3! = 20 \times 2 \times 6 = 240$$

روش دوم: کل حالت‌هایی که ۶ نفر در یک صف قرار می‌گیرند $6! = 720$ حالت است. در $\frac{1}{3}$ از این حالت‌ها از بین ۳ شخص a، b و c، شخص a جلوتر، در $\frac{1}{3}$ از حالت‌ها شخص b جلوتر و در $\frac{1}{3}$ از حالت‌ها شخص c جلوتر می‌ایستد. پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر با $240 = 720 \times \frac{1}{3}$ می‌شود.

۶) چند زیر مجموعه ۱۰ عضوی از مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۶ وجود دارد که شامل اعداد ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ باشد ولی شامل ۶ و ۷ نباشد؟

۲۲۷ (۴)

۵۶ (۳)

۳۵ (۲)

۲۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

بودن یا نبودن اعداد ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲ و ۱ در زیر مجموعه مورد نظر مشخص شده، پس باید از بین اعداد ۱۵، ...، ۹ و ۸ پنج عضو دیگر را انتخاب کرد که تعداد راه‌های انجام این کار، برابر است با:

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 6} = 56$$

کدام است؟
 $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$

حاصل عبارت ۷

- (۱) $n^{2^{n-1}}$ (۲) n^{2^n} (۳) $(n-1)^{2^{n-1}}$ (۴) $(n-1)^{2^n}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \times n!}{k(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

۸ یک جعبه شامل ۷ جوراب آبی و ۵ جوراب قرمز است. به چند طریق می‌توان دو جوراب با رنگ یکسان انتخاب کرد؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۲۱ (۳) ۳۱ (۴) ۴۱

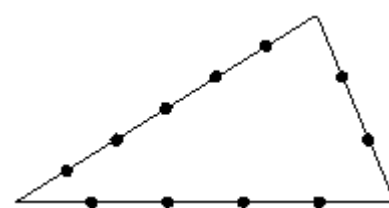
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

به $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = ۲۱$ طریق می‌توان ۲ جوراب آبی از ۷ جوراب آبی و به $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = ۱۰$ طریق می‌توان ۲ جوراب قرمز از ۵ جوراب قرمز انتخاب کرد. پس داریم:

$$\binom{7}{2} + \binom{5}{2} = ۲۱ + ۱۰ = ۳۱$$

۹) چند مثلث می‌توان ساخت که رئوس آن از ۱۱ نقطه شکل زیر باشند؟



۱۷۶ (۲)

۱۵۱ (۴)

۱۶۵ (۱)

۱۵۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

چون تعداد حالت‌ها به روش مستقیم وقت‌گیر است، از متمم استفاده می‌کنیم. تعداد کل حالت‌ها، انتخاب ۳ نقطه از بین ۱۱ نقطه است. یعنی:

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!(11-3)!} = 165$$

اما اگر هر سه نقطه انتخاب‌شده روی یک ضلع قرار بگیرند، مثلثی تشکیل نمی‌شود و بنابراین لازم است حالت‌هایی را که هر سه نقطه انتخاب‌شده روی یک ضلع قرار دارند، از تعداد کل کم کنیم:

پس حالت‌هایی که هر سه نقطه روی یک ضلع قرار دارند، برابر است با:

$$\binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

حال این تعداد را از مقدار کل کم می‌کنیم: $165 - 14 = 151$

۱۰) اگر $\frac{P(n,4)}{C(n-1,4)} = 26$ ، مقدار n کدام است؟

۵۵ (۴)

۵۴ (۳)

۵۳ (۲)

۵۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \frac{P(n,4)}{C(n-1,4)} &= \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1-4)! \times 4!}} \\ &= \frac{n! \times (n-5)! \times 4!}{(n-4)! \times (n-1)!} = \frac{n \times (n-1)! \times (n-5)! \times 24}{(n-4) \times (n-5)! \times (n-1)!} = 26 \\ \Rightarrow \frac{n \times 24}{n-4} &= 26 \Rightarrow 24n - 104 \Rightarrow 2n = 104 \Rightarrow n = 52 \end{aligned}$$

۱۱) با حروف AAAAABCDEFGG چند کلمه ۱۱ حرفی، بدون توجه به معنی کلمه، می‌توان ساخت به‌طوری که هیچ دو ای مجاور هم نباشند؟

- (۱) $6!$
- (۲) $21 \times 6!$
- (۳) $25 \times 6!$
- (۴) $15 \times 5!$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا حروف $A \square B \square C \square D \square E \square F \square G$ را به $6!$ حالت می‌چینیم. حال از بین ۷ جای خالی ۵ جای خالی را انتخاب کرده و AAAAA را به یک طریق می‌چینیم.

$$6! \times \binom{7}{5} = 6! \times \frac{7 \times 6}{2} = 21 \times 6!$$

۱۲) گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می‌تواند دسته‌گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

- (۱) ۱۲۶
- (۲) ۱۴۰
- (۳) ۱۵۴
- (۴) ۱۶۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با انتخاب ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه گل از بین ۸ شاخه گل مختلف، طبق اصل جمع خواهیم داشت:

$$\binom{8}{4} + \underbrace{\binom{8}{5}}_{\binom{8}{3}} + \underbrace{\binom{8}{6}}_{\binom{8}{2}} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} + \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} + \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 70 + 56 + 28 = 154$$

توجه: از تساوی $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ برای ساده‌تر کردن محاسبات استفاده کردیم.

۱۳) از بین ۵ مهره آبی و ۳ مهره قرمز می‌خواهیم سه مهره انتخاب کنیم. چند حالت وجود دارد که در این انتخاب از هر دو رنگ داشته باشیم؟

۲۴ (۴)

۴۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

دو حالت زیر مطلوب است:

$$\rightarrow \binom{5}{1} \times \binom{3}{2} = 5 \times 3 = 15 \quad \text{یک آبی و دو قرمز (الف)}$$

$$\rightarrow \binom{5}{2} \times \binom{3}{1} = 10 \times 3 = 30 \quad \text{دو آبی و یک قرمز (ب)}$$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} 15 + 30 = 45$$

۱۴) یک خانواده ۶ نفره شامل پدر، مادر، مادر بزرگ و سه فرزند، می‌خواهند عکس یادگاری بگیرند. به چند طریق می‌توان از این خانواده عکس گرفت به‌طوری که هیچ دو فرزندی کنار هم نیاشند؟

۲۲۵ (۴)

۱۴۴ (۳)

۱۳۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

برای آنکه فرزندان کنار هم نباشند باید حالات زیر اتفاق بیفتد.

☐ مادر بزرگ ☐ مادر ☐ پدر ☐

ابتدا از ۴ جایگاه دایره‌ای شکل، ۳ جایگاه را فرزندان می‌توانند اشغال کنند که این کار به $\binom{4}{3}$ طریق امکان‌پذیر است. همچنین والدین به ۳! طریق و فرزندان نیز به ۳! طریق می‌توانند جایگشت داشته باشند لذا کل حالات عبارت است از:

$$\binom{4}{3} \times 3! \times 3! = \frac{4!}{3!(4-3)!} \times 6 \times 6 = 4 \times 36 = 144$$

۱۵) از بین ۷ بازیکن فوتبال که دوتای آن‌ها برادر هستند، می‌خواهیم ۳ نفر را به عنوان مدافع انتخاب کنیم به طوری که حداقل یکی از برادرها به عنوان مدافع انتخاب شود. این امر به چند طریق ممکن است؟

۳۵ (۴)

۳۰ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

یا یکی از برادرها به عنوان مدافع انتخاب می‌شود یا هر دوی آن‌ها به عنوان مدافع انتخاب می‌شوند. پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{2}{1} \binom{5}{2} + \binom{2}{2} \binom{5}{2} = 20 + 5 = 25$$

۱۶) از بین کتاب‌های $F_1, F_2, F_3, R_1, R_2, R_3, R_4$ می‌خواهیم ۳ کتاب را انتخاب کنیم. این عمل به چند طریق انجام‌پذیر است به طوری که دو کتاب F_1 و R_1 با هم انتخاب نشوند؟

۲۰ (۴)

۲۵ (۳)

۳۰ (۲)

۱۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\text{تعداد حالت‌هایی که } F_1 \text{ و } R_1 \text{ با هم انتخاب می‌شوند} = \binom{2}{2} \binom{5}{1} = 5$$

$$\text{کل حالت‌ها} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

$$\text{حالت‌های مطلوب} = 35 - 5 = 30$$

۱۷) در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۳ داور ایرانی، ۲ داور یونانی و ۴ داور برزیلی قرار است کمیته‌ای ۵ نفره از داوران تشکیل شود. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد به‌طوری که حداقل ۲ داور ایرانی و حداقل یک داور یونانی در کمیته باشند؟

۴۷ (۴)

۵۷ (۳)

۴۶ (۲)

۵۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

حالات مطلوب را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

(۱) دو داور ایرانی، یک داور یونانی و دو داور برزیلی در کمیته باشد. یا (۲) دو داور ایرانی و دو داور یونانی و یک داور برزیلی در کمیته باشد. یا (۳) سه داور ایرانی و یک داور یونانی و یک داور برزیلی در کمیته باشد. یا (۴) سه داور ایرانی و دو داور یونانی در کمیته باشد.

بنابراین:

$$\begin{aligned} \text{تعداد کل حالات} &= \underbrace{\binom{3}{2} \binom{2}{1} \binom{4}{2}}_{(1)} + \underbrace{\binom{3}{2} \binom{2}{2} \binom{4}{1}}_{(2)} \\ &\quad + \underbrace{\binom{3}{3} \binom{2}{1} \binom{4}{1}}_{(3)} + \underbrace{\binom{3}{3} \binom{2}{2}}_{(4)} \\ &= ۳۶ + ۱۲ + ۸ + ۱ = ۵۷ \end{aligned}$$

۱۸) اگر $\frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} = ۲۶$ ، مقدار n کدام است؟

۵۵ (۴)

۵۴ (۳)

۵۳ (۲)

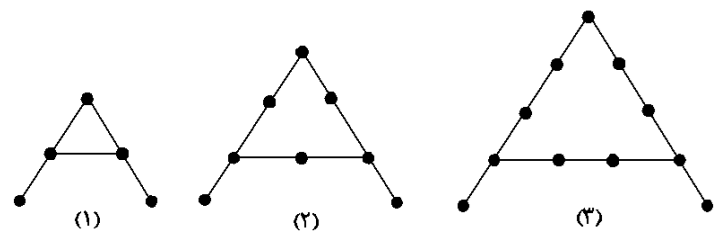
۵۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} &= \frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-1-4)! \times 4!}} \\ &= \frac{n! \times (n-5)! \times 4!}{(n-4)! \times (n-1)!} = \frac{n \times (n-1)! \times (n-5)! \times 24}{(n-4) \times (n-5)! \times (n-1)!} = ۲۶ \\ \Rightarrow \frac{n \times 24}{n-4} &= ۲۶ \Rightarrow ۲۴n = ۲۶n - ۱۰۴ \Rightarrow ۲n = ۱۰۴ \Rightarrow n = ۵۲ \end{aligned}$$

۱۹) با توجه به الگوی زیر تعداد چوب کبریت‌ها در شکل دهم کدام است؟



۳۵ (۱)

۲۹ (۲)

۳۲ (۳)

۳۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

شماره مرحله	۱	۲	۳	...	n
تعداد چوب کبریت‌ها	$3(1)+2$	$3(2)+2$	$3(3)+2$	...	$3n+2$

$$\Rightarrow a_n = 3n + 2 \xrightarrow{n=10} a_{10} = 3(10) + 2 = 32$$

۲۰) تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعه $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ که شامل a باشند ولی شامل g نباشند چندتا است؟

۲۰ (۴)

۵ (۳)

۱۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

a حتماً باید باشد و g نباید باشد پس باید ۳ حرف از $\{b, c, d, e, f\}$ انتخاب کنیم:

$$1 \times \binom{5}{3} = 10$$

a حضور دارد

۲۱) به چند طریق می‌توان مثلی را تشکیل داد که رؤس آن، نقاط مشخص شده روی خطوط زیر باشد؟



- (۱) ۳۰
(۲) ۱۵
(۳) ۴۵
(۴) ۵۵

پاسخ: گزینه ۳

برای تشکیل مثلث باید ۲ نقطه از روی یک خط و یک نقطه از روی خط دیگر انتخاب کنیم:

$$\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} + \binom{5}{1} \times \binom{3}{2} = 3 \times 10 + 5 \times 3 = 30 + 15 = 45$$

۲۲) با حروف کلمه «تپه حسلو» چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت به‌طوری‌که فقط یک حرف نقطه‌دار باشد؟

- (۱) ۷۲۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۷۱

پاسخ: گزینه ۱

از سه حرف نقطه‌دار، یکی را انتخاب می‌کنیم و از ۵ حرف باقی‌مانده ۳ حرف انتخاب می‌کنیم. به ۴! حالت این ۴ حرف می‌توانند جابه‌جا شوند.

$$\binom{3}{1} \binom{5}{3} \times 4! = 720$$

۲۳) یک اداره ۵ سواری و ۴ وانت دارد. این اداره به چند طریق می‌تواند ۳ ماشین را برای مأموریت به شهرستان اعزام کند به طوری که حداقل دو سواری بین ماشین‌های اعزامی باشد؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۸۰ (۴) ۵۰

پاسخ: گزینه ۴

حداقل دو سواری یعنی دو سواری و یک وانت یا سه سواری.

چون ترتیب ماشین‌ها اهمیت ندارد، باید از ترکیب استفاده کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \text{تعداد حالت هایی که دو سواری و یک وانت وجود دارد} &= \binom{5}{2} \binom{4}{1} = 10 \times 4 = 40 \\ \text{تعداد حالت هایی که سه سواری اعزام شوند} &= \binom{5}{3} = 10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 40 + 10 = 50$$

۲۴) اگر $C(n, 3) = P(n-1, 2)$ باشد، حاصل $\binom{n}{2}$ کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۱ (۳)

۱۰ (۲)

۱۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$C(n, 3) = \frac{n!}{(n-3)! \times 3!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{(n-3)! \times 6}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$P(n-1, 2) = \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = (n-1) \times (n-2)$$

$$C(n, 3) = P(n-1, 2) \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = (n-1) \times (n-2)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{6} = 1 \Rightarrow n = 6$$

$$\Rightarrow \binom{n}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

۲۵) از بین n کتاب ریاضی و $n-1$ کتاب شیمی، به ۱۶ حالت می‌توانیم ۲ کتاب هم مبحث را انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب از مجموع کتاب‌ها انتخاب کنیم؟

۱۰ (۴)

۵۶ (۳)

۱۲۰ (۲)

۸۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$$\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 16 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(n+n-2)}{2} = 16$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)(2n-2)}{2} = 16$$

$$\Rightarrow (n-1)^2 = 16 \Rightarrow n-1 = \pm 4$$

$$\Rightarrow n = 5 \text{ قابل قبول است} \Rightarrow n = 5 \text{ یا } n = -3$$

$$\Rightarrow n + (n-1) = 5 + 4 = 9$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$$

۲۶) اگر $(n+1)! = 56(n-1)!$ باشد، حاصل $\binom{n-2}{n-4}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۲۱
(۳) ۱۴
(۴) ۱۵

پاسخ: گزینه ۱

$$(n+1)! = 56(n-1)!$$

$$\Rightarrow (n+1)(n)(n-1)! = 56(n-1)!$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 56 = 8 \times 7 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 7$$

$$\binom{n-2}{n-4} \xrightarrow{n=7 \text{ جایگذاری}} \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 10$$

۲۷) به چند روش می‌توان از بین ۳ دانش‌آموز پایه دهم و ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم یک کمیته ۳ نفره انتخاب کرد که در آن هم دانش‌آموز پایه دهم و هم دانش‌آموز پایه یازدهم وجود داشته باشد؟

- (۱) ۲۵
(۲) ۳۰
(۳) ۵۰
(۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۲

چون می‌خواهیم از هر دو پایه در کمیته حضور داشته باشند یا «یک نفر از یازدهم و دو نفر از دهم» انتخاب می‌کنیم یا «دو نفر از یازدهم و یک نفر از دهم».

$$\binom{3}{2} \binom{4}{1} + \binom{3}{1} \binom{4}{2} = 12 + 18 = 30$$

۲۸) به چند طریق می‌توان ۵ کودک را از میان ۸ کودک و ۴ بزرگسال را از بین ۶ بزرگسال انتخاب کرد و آن‌ها را یک در میان کنار هم نشاند؟

- (۱) $20 \times 8!$
(۲) $60 \times 8!$
(۳) $20 \times 6!$
(۴) $60 \times 6!$

پاسخ: گزینه ۲

باید از بین ۸ کودک ۵ کودک و از بین ۶ بزرگسال ۴ بزرگسال را انتخاب کرد یعنی $\binom{6}{4} \times \binom{8}{5}$ و از طرفی چون باید یک در میان کنار هم بنشینند اولین و آخرین نفر کودک هستند، (زیرا تعداد کودک‌ها یکی بیشتر است). ۵ کودک به ۵ حالت در داخل دایره‌ها و ۴ بزرگسال به ۴ حالت داخل مربع‌های شکل زیر جایگشت دارد.

$$\bigcirc \square \bigcirc \square \bigcirc \square \bigcirc \square \bigcirc$$

$$= \binom{6}{4} \times \binom{8}{5} \times 5! \times 4! \quad \text{تعداد کل حالت‌ها : طبق اصل ضرب}$$

$$= \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{8!}{5! \times 3!} \times 4! \times 5! = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3! \times 8!}{2 \times 3!} = 60 \times 8!$$

۲۹) شخصی می‌خواهد یک مهمانی ۵ نفره از میان ۹ نفر از دوستان خود برگزار کند. اگر امکان دعوت از دو فرد A و B با هم وجود نداشته باشد، به چند طریق می‌تواند مهمان‌ها را انتخاب کند؟

(۱) ۴۲

(۲) ۷۰

(۳) ۹۱

(۴) ۱۲۶

پاسخ: گزینه ۳

دو حالت برای انتخاب مهمان‌ها وجود دارد:

حالت اول: هیچ کدام از دو فرد A و B دعوت نشوند. در این صورت مهمان‌ها از میان ۷ نفر دیگر انتخاب می‌شوند که تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{7}{5} = 21$$

حالت دوم: یک نفر از میان A و B انتخاب شود. در این صورت ۴ مهمان دیگر از میان ۷ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌شوند که تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{2}{1} \binom{7}{4} = 2 \times 35 = 70$$

بنابراین تعداد روش‌های انتخاب مهمان‌ها برابر است با:

$$21 + 70 = 91$$

۳۰) به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز نهمی و ۵ دانش‌آموز دهمی را در یک صف قرار داد به‌طوری که دانش‌آموزان نهمی و دهمی یک در میان در صف قرار گیرند؟

(۱) ۹!

(۲) $2 \times 5! \times 4!$

(۳) ۵!

(۴) $4! \times 5!$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

دانش‌آموزان نهمی را با ○ و دانش‌آموزان دهمی را با □ نشان می‌دهیم. چون تعداد دهمی‌ها از نهمی‌ها بیشتر است برای این که یک در میان قرار بگیرند ابتدای صف حتماً باید دهمی باشد. چرا که اگر ابتدای صف نهمی باشد در انتهای صف دو دهمی کنار هم قرار می‌گیرند که یک در میان نمی‌شود.

□ ○ □ ○ □ ○ □ ○ □

تعداد حالت‌های پر کردن مربع‌ها از دهمی‌ها برابر ۵! و تعداد حالت‌های پر کردن دایره‌ها از نهمی‌ها ۴! است؛ پس طبق اصل ضرب جواب نهایی برابر است با:

$$5! \times 4!$$

(۳۱) تعداد جایگشت‌های شش‌حرفی واژه OLYMPIAD که در آن حروف صدادر (O, A, I) یک در میان قرار گیرند، کدام است؟

- (۱) $6!$ (۲) $\frac{7!}{2!}$
(۳) $3 \times 5!$ (۴) $\frac{3 \times 6!}{2!}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

کلمه OLYMPIAD دارای ۸ حرف است که ۳ حرف O، I و A صدا دارند، تعداد جایگشت‌های موردنظر که در آن جایگاه‌های اول، سوم و پنجم را با حروف صدادر و سایر خانه‌ها را با حروف بی‌صدا پر کنیم، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{3} \boxed{5} \boxed{2} \boxed{4} \boxed{1} \boxed{3} = 3 \times 5!$$

صدادر صدادر صدادر

از طرفی می‌توان جایگاه اول، سوم و پنجم را با حروف بی‌صدا پر کرد. پس تعداد کل جواب‌ها برابر است با:

$$2 \times (3 \times 5!) = 6 \times 5! = 6!$$

(۳۲) از هریک از قاره‌های آسیا، اروپا، آفریقا، اقیانوسیه و آمریکا ۱۰ ورزشکار به المپیک دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توانیم ۴ ورزشکار از میان آن‌ها انتخاب کنیم به طوری که هم قاره‌ای نباشند؟

- (۱) 50000 (۲) 40000
(۳) 21000 (۴) 45000

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا ۴ قاره از بین قاره‌های موجود انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{4} = 5$$

سپس از هر قاره یک ورزشکار انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{10}{1} \binom{10}{1} \binom{10}{1} \binom{10}{1} = 10000$$

پس در کل داریم:

$$5 \times 10000 = 50000$$

۳۳) چند مقدار قابل قبول برای x وجود دارد تا معادله $\binom{4x+15}{x^2} = \binom{4x+15}{2x}$ برقرار باشد؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

از آنجا که انتخاب از $4x+15$ حالت صورت گرفته است، پس در یکی از حالات می‌تواند $x^2 = 2x$ برقرار باشد:

$$x^2 = 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

هر دو مقدار برای x پذیرفته هستند.

از طرفی می‌دانیم که $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ پس یعنی حالت $x^2 + 2x = 4x + 15$ نیز پذیرفته است:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

که حالت $x = -3$ باعث منفی شدن $2x$ می‌شود و پذیرفته نیست.

پس در مجموع ۳ جواب برای x وجود دارد.

۳۴) در یک مسابقه کشتی، n کشتی‌گیر حرفه‌ای شرکت کرده‌اند. قرار است که هر دو کشتی‌گیر یک‌بار با هم مسابقه بدهند. اگر تعداد کل مسابقات ۶۶ مسابقه باشد، n کدام است؟

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

از آنجایی که هر مسابقه کشتی بین ۲ نفر برگزار می‌شود، پس تعداد کل مسابقات می‌شود $\binom{n}{2}$. علت آن هم واضح است، چون در هر مسابقه ۲ نفر از n نفر انتخاب می‌کنیم در شرایطی که ترتیب آن‌ها مهم نیست، یعنی مسابقه بین علی و رضا همان مسابقه بین رضا و علی است و آن‌ها را دو مسابقه مختلف در نظر نمی‌گیریم. بنابراین داریم:

$$\binom{n}{2} = 66 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 66 \Rightarrow n(n-1) = 132$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow (n-12)(n+11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 12 \\ n = -11 \end{cases}$$

فقط $n = 12$ قابل قبول است. چون n عددی طبیعی است.

۳۵ با اعداد طبیعی یک رقمی، چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که از ارقام زوج، بیش‌تر از ارقام فرد در ساخت عدد استفاده شده باشد؟

۱۵۱۲ (۲)

۷۴۴ (۴)

۲۴۰ (۱)

۵۰۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

اگر ۳ رقم زوج و یک رقم فرد باشد:

$$\underbrace{\binom{5}{1}}_{\substack{\text{یک} \\ \text{رقم} \\ \text{فرد}}} \times \underbrace{\binom{4}{3}}_{\substack{\text{سه} \\ \text{رقم} \\ \text{زوج}}} \times \underbrace{4!}_{\substack{\text{جایگشت} \\ \text{ارقام}}} = 5 \times 4 \times 24 = 480$$

اگر هر ۴ رقم زوج باشد:

$$\underbrace{\binom{4}{4}}_{\substack{\text{چهار} \\ \text{رقم} \\ \text{زوج}}} \times \underbrace{4!}_{\substack{\text{جایگشت} \\ \text{ارقام}}} = 1 \times 24 = 24$$

در مجموع داریم:

$$480 + 24 = 504 = \text{کل حالات}$$

۳۶ ۵ کارت سفید یکسان و ۴ کارت مشکی یکسان را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک ردیف قرار داد، به‌طوری‌که اول و آخر ردیف، کارت مشکی باشد و هیچ دو کارت مشکی‌ای کنار هم نباشند؟

۶ (۲)

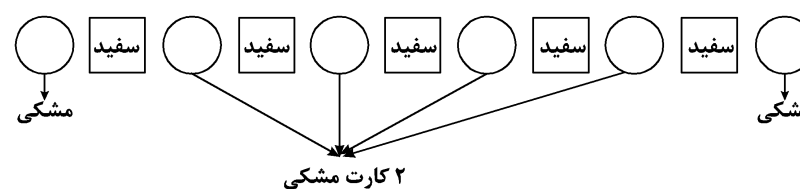
۱۴۴ (۴)

۱۲ (۱)

۲۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»



ابتدا کارت‌های سفید را قرار داده، سپس در اول و آخر ردیف، کارت مشکی قرار می‌دهیم. درنهایت بین کارت‌های سفید ۴ جایگاه داریم برای دو کارت مشکی یعنی انتخاب $\binom{4}{2}$ که برابر است با ۶.

۳۷ اگر $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی این مجموعه که دارای عضو a و فاقد عضو b باشد، چه قدر است؟

۸ (۲)

۱۲ (۴)

۶ (۱)

۱۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

هدف یافتن زیرمجموعه‌هایی در قالب $\{a, -, -, -\}$ است که شامل عضو b نیست. در این صورت اعضای a و b را از مجموعه A کنار گذاشته و از ۵ عضو باقی‌مانده باید ۳ انتخاب داشته باشیم:

$$\binom{5}{3} = 10$$

۳۸ ۵ خانواده دونفری مفروض‌اند. به چند طریق می‌توان یک گروه سه نفری انتخاب کرد به طوری که هیچ دو نفری از آن‌ها عضو یک خانواده نباشند؟

۸۰ (۲)

۲۰ (۴)

۶۰ (۱)

۱۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\binom{5}{3} \times \underbrace{\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}}_{\substack{\text{از هر} \\ \text{خانواده} \\ \text{یک نفر}}} = 10 \times 8 = 80$$

$\downarrow$
انتخاب
خانواده
اختلافی

۳۹) مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ ، چند زیر مجموعه ۴ عضوی دارد که مجموع اعضای هر یک از این زیرمجموعه‌ها، عددی زوج باشد؟

- (۱) ۱۵۰
(۲) ۱۵۵
(۳) ۱۶۵
(۴) ۱۷۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

مجموعه A را می‌توان به دو زیر مجموعه $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ (شامل اعداد فرد) و $A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (شامل اعداد زوج) افراز نمود. حالت های ممکن برای انتخاب یک زیر مجموعه ۴ عضوی از A که مجموع اعضای آن عددی زوج باشد، برابر است با:

$$\binom{5}{4} + \binom{5}{2} \times \binom{6}{2} + \binom{6}{4} = 5 + 10 \times 15 + 15 = 170$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 ۴ عدد زوج ۲ عدد زوج ۲ عدد فرد ۴ عدد فرد

۴۰) در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته‌ای ۴ نفره از داوران تشکیل شود. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد به‌گونه‌ای که از هر کشور حداقل یک داور در این کمیته حضور داشته باشد؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۷۲ (۳) ۹۶ (۴) ۱۴۴

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تعداد روش‌های ممکن برای انجام این کار برابر است با:

$$\binom{4}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{3}{2} \times \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{2} = 36 + 24 + 12 = 72$$

(۴۱) ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند به‌گونه‌ای که هیچ دو دانش‌آموزی از پایه دوازدهم کنار هم نباشند؟

(۴) $۴! \times ۶!$

(۳) $۵! \times ۷!$

(۲) $۵! \times ۶!$

(۱) $۶! \times ۷!$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$\times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times \bigcirc \times$

فرض کنید ابتدا ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم در صف بایستند که این کار به $۶!$ طریق امکان‌پذیر است. اگر محل قرار گرفتن این دانش‌آموزان را مطابق شکل با $\bigcirc$ نمایش دهیم، آنگاه ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم می‌توانند در مکان‌هایی که با علامت $\times$ در شکل مشخص شده قرار گیرند. بعد از انتخاب ۴ مکان از ۷ مکان مشخص شده باید دقت کرده که $۴!$ جایگشت برای ایستادن این ۴ دانش‌آموز در این مکان‌ها وجود دارد، بنابراین تعداد حالت‌های ایستادن این افراد در یک صف برابر است با:

$$۶! \times \binom{۷}{۴} \times ۴! = ۶! \times \frac{۷!}{۴!۳!} \times ۴! = \frac{۶ \times ۵! \times ۷!}{۳!} = ۵! \times ۷!$$

(۴۲) یک آشپز ۱۰ نوع ادویه دارد که با استفاده از هر ۴ تا از این ادویه‌ها، یک طعم مخصوص درست می‌کند. اگر سه نوع از این ادویه‌ها به گونه‌ای باشند که هیچ دوتایی از آنها با هم قابل استفاده نباشند، این آشپز چند طعم مختلف می‌تواند ایجاد کند؟

(۴) ۳۵

(۳) ۱۰۵

(۲) ۱۴۰

(۱) ۲۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

انتخاب ادویه‌ها به دو طریق امکان‌پذیر است:

الف) هیچ کدام از آن ۳ نوع ادویه استفاده نشود. در این صورت تعداد طعم‌های ایجاد شده برابر است با:

$$\binom{۷}{۴} = ۳۵$$

ب) یکی از ۳ نوع ادویه مورد نظر استفاده شود. در این صورت تعداد طعم‌های ایجاد شده برابر است با:

$$\binom{۳}{۱} \times \binom{۷}{۳} = ۳ \times ۳۵ = ۱۰۵$$

بنابراین در مجموع $۱۴۰ = ۱۰۵ + ۳۵$ نوع طعم مختلف می‌توان ایجاد کرد.

۴۳) به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آن‌که هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟

۱۵۰ (۴)

۱۳۵ (۳)

۱۲۵ (۲)

۱۰۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه ۴

برای به‌دست آوردن تعداد راه‌های تقسیم کتاب‌ها، حالت‌های زیر را داریم:

حالت اول: یک نفر سه کتاب و هر دو نفر بعدی یک کتاب دریافت کنند.

$$2! \times \binom{5}{3} \times \binom{3}{1} = 3 \times 10 \times 2 = 60$$

تقسیم دو کتاب
باقی مانده به
دو نفر دیگر
انتخاب سه کتاب
از پنج کتاب
انتخاب یک نفر از
سه نفر

حالت دوم: دو نفر، ۲ کتاب و نفر بعدی یک کتاب دریافت کند.

$$\binom{3}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{1}{1} = 3 \times 10 \times 3 \times 1 = 90$$

انتخاب یک کتاب
از یک کتاب
باقی مانده
انتخاب دو کتاب
از سه کتاب دیگر
انتخاب دو کتاب
از پنج کتاب
انتخاب دو نفر
از دو نفر

$$\Rightarrow 60 + 90 = 150$$

بنابراین به ۱۵۰ طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر تقسیم کرد.

۴۴) به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟

۹۵ (۴)

۹۱ (۳)

۸۷ (۲)

۸۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه ۳

حالت اول: هر دو نفر با هم در مهمانی شرکت نکنند که تعداد این حالت برابر است با:

$$\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

حالت دوم: یکی از آن دو نفر در مهمانی شرکت کند:

$$\binom{2}{1} \times \binom{7}{4} = 2 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 70$$

در مجموع داریم:

$$70 + 21 = 91$$

